جامعة البعث　　امتحانات الدورة التكميلية للعام الدراسي 2015 - 2016　　المدة: ساعة ونصف

كلية العلوم　　أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)　　العلامة: 100 درجة

قسم الرياضيات　　سنة ثانية رياضيات　　الاسم:

السؤال الأول (45 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن حلقة الأعداد الحقيقية مثالية في حلقة الأعداد العقدية.

(2) إن حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة تحقق خاصية الاختصار.

(3) إن المجموعة $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ تشكل حقلاً بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10 .

(4) المثالية $5Z$ حد مباشر في حلقة الأعداد الصحيحة Z .

(5) مميز حلقة الخارج $3Z/_{12Z}$ يساوي 6 .

(6) إن حلقة الخارج $Z_{12}/_{6Z_{12}}$ واحدية لأن Z_{12} حلقة واحدية.

(7) إذا كانت $A = 5Z$, $B = 15Z$ مثاليتين في Z، فإن $A.B = A \cap B$.

(8) إن العنصر $(3 , 0)$ جامد وقاسم للصفر في الحلقة $Z_3 \oplus Z_6$.

(9) إن الحلقة $(Z_{25}, + , .)$ حلقة موضعية.

(10) إذا كانت $R = (Z_4 , + , .)$ فإن $J(R) = <3>$.

(11) إذا كانت $A = <8>$ مثالية في حلقة الأعداد الصحيحة Z فإن $\text{rad } A = <4>$.

(12) إذا كانت $A = 6Z$, $B = 4Z$ مثاليتين في الحلقة Z، فإن $A : B = 12Z$.

(13) إن المثالية $3Z \cap 5Z$ أولية في حلقة الأعداد الصحيحة Z .

(14) إذا كانت $R = Z_{27}$ فإن $5 \in \text{rad } R$.

(15) إن الحدودية $f(x) = x^2 + 1$ هي حدودية أولية فوق Z_5 .

السؤال الثاني (40 درجة): أثبت صحة ما يلي: لتكن R حلقة

(1) إذا كانت R حلقة تبديلية تحقق $a^2 = a$ لكل $a \in R$ فإن $2a = 0$.

(2) إذا كانت R منطقة تكاملية و $a , b \in R$ يحققان $a^m = b^m$ و $a^n = b^n$ حيث n, m عددان صحيحان موجبان وأوليان فيما بينهما، عندئذ $a = b$.

(3) إذا كانت A, B مثاليتين يساريتين في R ، فإن $A \cap B$ أكبر مثالية يسارية في R.

(4) إذا كانت R واحدية فإن كل عنصر من R وغير قلوب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في R.

(5) كل مثالية صغيرة B في R تكون محتواة في جذر جاكبسون $J(R)$.

(6) إذا كان x عنصراً من الحلقة R عديم القوة فإن $x \in \text{rad } R$ ($\text{rad } R$ الأساس الأولي للحلقة R).

السؤال الثالث (15 درجة): إذا كانت R حلقة تبديلية و A , B مثاليتين في R وكان $\text{rad } A = \sqrt{A} = \{a : a \in R;\ \exists\, n \in Z^+;\ a^n \in A\}$. **أثبت صحة ما يلي:**

(1) $\text{rad } A$ مثالية في R .

(2) إذا كانت A أولية فإن $\text{rad } A = A$.

(3) إذا كانت $A = <2>$, $B = <3>$, $C = <4>$ ثلاث مثاليات في Z. أوجد :

$\text{rad }(A.C + A \cap B)$

2016 – 8 – 23　　مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

أجوبة أسئلة $\boxed{\text{بنى جبرية 2}}$

سلم رياضيات الدورة الإضافية 201

الجواب الأول $\boxed{\text{45 درجة}}$ لكل بند 3 درجات

(1) خطأ لأن $\forall a \in R$ و $i \in C$ فإن $ia \notin R$ حيث $i=\sqrt{-1}$

(2) خطأ، لأنها ليست علاقة تامة

(3) صح

(4) خطأ لأن 5 ليس جامد في Z.

(5) خطأ يساوي 4.

(6) صح

(7) خطأ لأن $A+B=5Z \neq Z$.

(8) صح

(9) صح

(10) خطأ تساوي $<2>$.

(11) خطأ تساوي $<2>$.

(12) خطأ $A \cdot B = 3Z$

(13) خطأ لأن $3Z \cap 5Z = 15Z$ و لا يساوي.

(14) خطأ لأن 5 ليس عديم القوة أو $5 \notin \operatorname{rad} R = <3>$

(15) خطأ لأن 2 جذر لها.

الجواب الثاني $\boxed{\text{40 درجة}}$

(1) $a+a = (a+a)^2 \Leftarrow a_{,a} = a+a+a+a = a^2+a^2+a^2+a^2$

8 بالاختصار $2a=0$

(2) بما أن $(n,m)=1$ أوليان فيما بينهما فإنه يوجد $u,v \in Z$ تحققان $nu+mv=1$

$a = a^{nu+mv} = (a^n)^u (a^m)^v = (b^n)^u (b^m)^v = b^{nu+mv} = b$ 6

(3) أن $A\cap B$ مثالية يسارية في R لأن $A\cap B\subseteq A,B$

لتكن L مثالية يسارية في R محتواة في A, B آن واحد، ولتكن $y\in L$ عندئذ $y\in A,B$ وبالتالي $y\in A\cap B$ أي $L\subseteq A\cap B$.

(4) ليكن a غير مقلوب من اليسار عندئذ $Ra\neq R$ لأنه إذا كان $Ra=R$ فإنه يوجد $b\in R$ بحيث $ba=1$ وهذا يعني أن a قابل للقلب من اليسار في R. بما أن Ra مثالية يسارية في R فإنه توجد مثالية يسارية أعظمية M في R تحوي Ra أي أن $a\in Ra\subseteq M$ $\Leftarrow$ M مثالية يسارية أعظمية في R تحوي a.

(5) N صغيرة في R ولنفرض جدلاً $N\not\subseteq J(R)$ عندئذ توجد مثالية أعظمية M في R بحيث $N\not\subseteq M$ ومنه $M\subset N+M=R$ كون M أعظمية وبما أن N صغيرة في R ينتج أن $M=R$ وهذا تناقض كون M أعظمية في R $\Leftarrow$
$N\subseteq J(R)$

(6) x عديم القوة فإنه يوجد $n\in N^*$ بحيث $x^n=0$. لتكن A مثالية أولية في R عندئذ فإن $x^n\in A$ وبما أن A أولية فإن $x\in A$ ومنه x تنتمي إلى جميع المثاليات الأولية في R وبالتالي $x\in Rad R$.

الجواب الثالث $\boxed{15 \text{ درجة}}$

(1) $0\in A \Leftarrow rad A\neq\phi$. ليكن $x,y\in rad A$ عندئذ يوجد $n,m\in N^*$ بحيث $x^n, y^m\in A$ ومنه

$$(x-y)^{n+m}=\sum_{k=0}^{n+m} C_k^{n+m} x^{n+m-k}(-y)^k\in A$$

5

$\Leftarrow x-y\in rad A$ كما أنه إذا كان $r\in R$ فإن $(rx)^n=r^nx^n\in A$

$\Leftarrow rx\in rad A$

(2) $A\subseteq rad A$. ليكن $x\in rad A$ عندئذ يوجد $n\in N^*$ بحيث $x^n\in A$ وبما أن A أولية [illegible] $\Leftarrow x\in A \Leftarrow rad A\subseteq A$.

(3)

$$rad(Ac+A\cap B)=rad(<8>+<6>)=rad<2>=<2>$$

5

د. [illegible]

[illegible] 2016/6/13